Lösungshinweise zu den Vorbereitungsaufgaben Grundwissentest – 9. Klasse

<u>Aufgabe 1 – Funktionen</u>

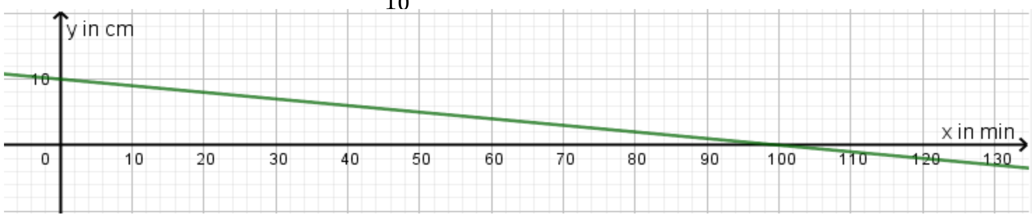
a) Eine Zuordnung $x \longmapsto y$, die jedem Wert für x aus der Definitionsmenge jeweils genau einen Wert für y zuordnet, heißt **Funktion**. – Die **Definitionsmenge** gibt an, welche Zahlen in den Funktionsterm eingesetzt werden dürfen. – Die **Wertemenge** umfasst alle Werte, die sich ergeben, wenn man die Zahlen aus der Definitionsmenge in den Funktionsterm einsetzt.
Eine Funktion der Form $x \longmapsto mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}; D_f = \mathbb{Q}$ heißt **lineare Funktion**. – Terme mit einer Variablen im Nenner heißen Bruchterme. Funktionen, deren Funktionsterme Bruchterme enthalten, nennt man **gebrochen-rationale Funktionen**.
Jede Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ heißt **Nullstelle** der Funktion f. – Einzelne Stellen bei gebrochen-rationalen Funktionen, die nicht in der Definitionsmenge enthalten sein können (weil der Nenner des Bruchterms Null wird), heißen **Definitionslücken**.
Graph, der *kein* Funktionsgraph ist:
Es gibt eine parallele Gerade zur y-Achse, die den Graphen (mindestens) zweimal schneidet.

b) $m = 2{,}5$ Der Graph ist eine steigende Gerade mit der Steigung $m = 2{,}5$.
$m = 0$ Der Graph ist eine zur x-Achse parallele Gerade.
$m = -0{,}5$ Der Graph ist eine fallende Gerade mit der Steigung $m = -0{,}5$.
$t = 2$ Der Graph ist eine Gerade, welche die y-Achse im Punkt (0|2) schneidet.
$t = 0$ Der Graph ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung.
$t = -1{,}5$ Der Graph ist eine Gerade mit y-Achsenabschnitt 1,5.
Zur Erinnerung: Steigung 2,5 (bzw. -2,5) bedeutet: wenn man von einem Punkt der Geraden eine Einheit nach rechts geht, so erreicht man wieder einen Punkt der Geraden, wenn man 2,5 Einheiten nach oben (bzw. unten) geht.

c) $g(x) = 3x - 6$; Schnittpunkt mit y-Achse: (0|-6)

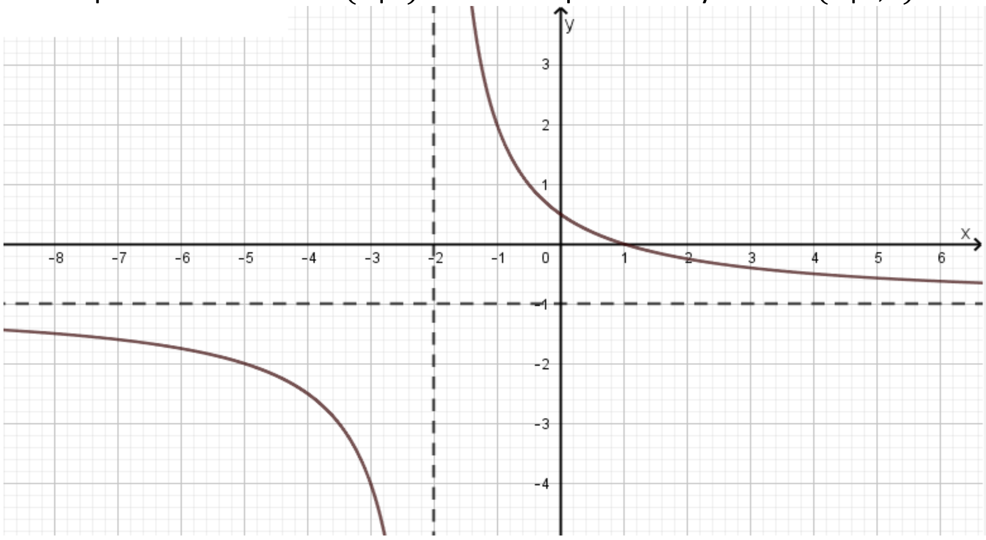
d) $g(x) = -\frac{4}{5}x + 1\frac{2}{5}$ Nullstellen: $-\frac{4}{5}x + 1\frac{2}{5} = 0 \Rightarrow \dots\ x = \frac{7}{4}$
Die Steigung m ergibt sich aus $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-(-1)}{-2-3} = -\frac{4}{5} = \frac{-1-3}{3-(-2)}$.
Einsetzen von A oder B in $y = -\frac{4}{5}x + t$ ergibt den y-Achsenabschnitt t.

e) Anfangshöhe (cm): 10 → $0{,}4 \cdot 10 = 4$ → $4 = 10 - 0{,}1x \Rightarrow \dots x = 60$ (min)
Höhe nach $1{,}1h = 60min + \frac{1}{10}h = 66min$ → $h = 10 - 0{,}1 \cdot 66 = 3{,}4$ (cm)



f) Die Hyperbel mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{x}$ verläuft im I. und III. Quadranten. Sie besitzt die Asymptoten $x = 0$ (y-Achse) und $y = 0$ (x-Achse).
Die folgenden Aussagen beziehen sich auf diese Hyperbel:
$a = 2; b = c = 0$ → $f(x) = \frac{2}{x}$ Streckung um den Faktor 2 (in y-Richtung)
$a = -4; b = c = 0$ → $f(x) = -\frac{4}{x}$ Streckung um Faktor 4 *und* Spiegelung an der x-Achse
$a = 2; b = -3; c = 2$ → $f(x) = \frac{2}{x-3} + 2$ Streckung um den Faktor 2, anschließend Verschiebung um 3 LE nach rechts und 2 LE nach oben; neue Asymptoten: $x = 3; y = 2$
$a = -2; b = 1; c = -3$ → $f(x) = \frac{-2}{x+1} - 3$ Streckung um den Faktor 2 und Spiegelung an der x-Achse; anschließend Verschiebung um 1 LE nach links und 3 LE nach unten; neue Asymptoten: $x = -1; y = -3$

g) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$ Senkrechte Asymptote bei $x = -2$
Senkrechte Asymptote: $x = -2$ Waagrechte Asymptote: $y = -1$
Schnittpunkt mit x-Achse: $(1|0)$ Schnittpunkt mit y-Achse: $(0|0{,}5)$



h) Es gilt: $\frac{3}{x+2} - 1 = \frac{3}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} = \frac{3-(x+2)}{x+2} = \frac{3-x-2}{x+2} = \frac{1-x}{x+2} \neq \frac{5-x}{x+2}$, d. h. Franz hat *nicht* Recht.
Anderer Weg (der speziell hier zum Erfolg führt): $f(0) = \frac{3}{0+2} - 1 = \frac{1}{2}$, *aber* $\frac{5-0}{0+2} = \frac{5}{2} \neq \frac{1}{2}$

Aufgabe 2 – Funktionsgleichung ablesen

Gerade durch den Ursprung: $g(x) = \frac{3}{2}x$ (2 nach rechts, 3 nach oben → wieder Punkt auf Gerade)
Zweite steigende Gerade: $h(x) = \frac{2}{5}x + 1{,}4$
Fallende Gerade: $l(x) = -\frac{4}{3}x - 2$ (3 nach rechts, 4 nach unten → Steigung $\frac{-4}{3}$)
Waagrechte Gerade: $w(x) = -2$
Fein gestrichelte Hyperbel: $p(x) = \frac{1}{x-2} + 2$
Grob gestrichelte Hyperbel: $q(x) = \frac{2}{x+3} - 1$ Wie kommt man auf die 2? Siehe Anmerkung!
Durchgezogene Hyperbel: $i(x) = -\frac{2}{x}$

Anmerkung zu q: Die Asymptoten führen zunächst auf den Ansatz $q(x) = \frac{a}{x+3} - 1$. Setzt man in diesen Ansatz den Punkt (-1/0) (oder einen anderen Punkt) ein, der auf der Hyperbel liegt, so ergibt sich a. $q(-1) = 0 \Rightarrow \frac{a}{-1+3} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$

Schnittpunkt von G_g und G_h:
Bestimmung des x-Werts: $\frac{3}{2}x = \frac{2}{5}x + 1{,}4 \Rightarrow \ldots\ x = 1\frac{3}{11}$
Bestimmung des y-Werts: $y = g(1\frac{3}{11}) = \frac{3}{2} \cdot 1\frac{3}{11} = 1\frac{10}{11}$ $\rightarrow S(1\frac{3}{11}; 1\frac{10}{11})$

Aufgabe 3 – Proportionalitäten

a) Direkt proportionale Zuordnung
Eine Ver-n-fachung der einen Größe bewirkt eine Ver-n-fachung der anderen Größe.
Zuordnungsvorschrift: $x \longmapsto m \cdot x$ Gleichung: $y = m \cdot x$
m ist der konstante Quotient $\frac{y}{x}$ eines Wertepaares $(x; m \cdot x)$ (→ *Quotientengleichheit*) und heißt *Proportionalitätsfaktor*. Der Graph ist eine *Ursprungsgerade* (Gerade durch (0;0)).
Typische Wertetabelle

x	0,25	0,5	1	?	3	3,5
y	3	?	12	30	36	42

Indirekt proportionale Zuordnung

Eine Ver-n-fachung der einen Größe bewirkt eine Ver-$\frac{1}{n}$-fachung der anderen Größe.

Zuordnungsvorschrift: $x \longmapsto \frac{a}{x}; a \neq 0$ Gleichung: $y = \frac{a}{x}; a \neq 0$

a ist das konstante Produkt $x \cdot y$ eines Wertepaares $(x; \frac{a}{x})$ (→ *Produktgleichheit*).

Der Graph ist eine (besondere) *Hyperbel*, die die x- und die y-Achse als Asymptoten hat.

Typische Wertetabelle

x	6	12	18	?	72	90
y	3	?	1	0,5	0,25	0,2

b) Direkte Proportionalität: Wenn ein Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit fährt, ist die zurückgelegte Strecke direkt proportional zur dafür benötigten Zeit.
Indirekte Proportionalität: Wenn man eine bestimmte Wassermenge in gleichartige Gefäße bei gleicher Füllhöhe gießt, dann ist die Anzahl der benötigten Gefäße indirekt proportional zum Wasservolumen in den Gefäßen.

c) Erster Fall: Der y-Wert halbiert sich bzw. verdoppelt sich (Produktgleichheit).
Zweiter Fall: Der y-Wert verdoppelt sich bzw. halbiert sich (Quotientengleichheit).

Aufgabe 4 – Bruchterme und Bruchgleichungen

a) $\frac{2x+8x}{x^2+4x} = \frac{10x}{x(x+4)} = \frac{10}{x+4}$ gemeint war $\frac{2x+8}{x^2+4x} = \frac{2(x+4)}{x(x+4)} = \frac{2}{x}$; $\frac{3x}{3x-x^2} = \frac{3x}{x(3-x)} = \frac{3}{3-x}$; $\frac{2x+1}{x+1} = \%$

b) $\frac{3}{6+x} + \frac{2}{x} = \frac{3}{6+x} \cdot \frac{x}{x} + \frac{2}{x} \cdot \frac{6+x}{6+x} = \frac{3x+2(6+x)}{(6+x)\cdot x} = \frac{5x+12}{(6+x)\cdot x}$ Zu a) $\frac{x-1}{2x} = \frac{(x-1)\cdot 3(x+3)}{2x \cdot 3(x+3)} = \frac{3x^2+6x-9}{6x(x+3)}$

$\frac{4}{x+3} - \frac{2x}{x-3} = \frac{4}{x+3} \cdot \frac{x-3}{x-3} - \frac{2x}{x-3} \cdot \frac{x+3}{x+3} = \frac{4(x-3)-2x\cdot(x+3)}{x^2-9} = \frac{4x-12-2x^2-6x}{x^2-9} = \frac{-2x^2-2x-12}{x^2-9}$

$\frac{x}{2x-8} - \frac{1-x}{x^2-4x} = \frac{x}{2(x-4)} - \frac{1-x}{x(x-4)} = \frac{x\cdot x}{2x(x-4)} - \frac{(1-x)\cdot 2}{2x(x-4)} = \frac{x^2-2+2x}{2x(x-4)}$

c) $\frac{x}{x-2} : \frac{x^2}{x-2} = \frac{x}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x^2} = \frac{1}{x}$; $\frac{2x^2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{2x\cdot(x+1)}{1\cdot 1} = 2x^2+2x$; $\frac{y}{y+1} : \frac{y}{1} = \frac{y}{y+1} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y+1}$

d) $x^2 \cdot x^{-3} = x^{2-3} = x^{-1} = \frac{1}{x}$; $(x^{-3})^2 = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$; $x^{-4} : 2^{-4} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{x}\right)^4 = \frac{16}{x^4}$

e) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x+3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x+3} = 1 \underset{x \neq -3}{\Leftrightarrow} 2 = 1\cdot(x+3) \Leftrightarrow 2 = x+3 \Leftrightarrow x = -1$

f) $\frac{2}{x} = \frac{5}{3-x} \quad | \cdot x \cdot (3-x)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}$

$\frac{2}{x} \cdot x \cdot (3-x) = \frac{5}{3-x} \cdot x \cdot (3-x)$

$2 \cdot (3-x) = 5x$

$6 - 2x = 5x$

$6 = 7x$

$\frac{6}{7} = x \quad \Rightarrow L = \{\frac{6}{7}\}$

$\frac{1}{x(x+1)} - \frac{5}{2x+2} = 0 \quad | + \frac{5}{2(x+1)}$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -1\}$

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{5}{2(x+1)} \quad | \cdot 2x(x+1)$

$1 \cdot 2 = 5x$

$\frac{2}{5} = x$

$\Rightarrow L = \{\frac{2}{5}\}$

Aufgabe 5 – Laplace-Experimente

a) Ein **Ergebnis** ist ein Versuchsausgang (von mehreren möglichen) eines Zufallsexperiments. Die Menge aller möglichen Ergebnisse heißt **Ergebnismenge** Ω. Die einzelnen Ergebnisse bezeichnet man mit $\omega_1, \omega_2, \ldots$. Jede *Teilmenge der Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ eines Zufallsexperiments heißt **Ereignis**. Das **Gegenereignis** $\bar{E}$ zu einem Ereignis E enthält die Ergebnisse von Ω, die nicht zu E gehören. Die *relative Häufigkeit eines Ereignisses* ist die Summe der relativen Häufigkeiten der zu diesem Ereignis gehörenden Ergebnisse.

b) Die relative Häufigkeit eines Ereignisses stabilisiert sich mit zunehmender Versuchsanzahl um einen festen Wert. (Dieser dient als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.)

c) Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen *Laplace-Experimente*. Man sagt in diesem Fall: Die Laplace-Annahme ist erfüllt. Hat ein Laplace-Experiment n Ergebnisse, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis $\frac{1}{n}$.

Die *Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses* erhält man, indem man die Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse durch die Gesamtzahl aller möglichen Ergebnisse teilt.

Das Zufallsexperiment „Werfen eines Reißnagels“ mit Ω = {Spitze unten; Spitze oben} ist kein Laplace-Experiment, da die beiden Ergebnisse nicht gleich wahrscheinlich sind.

d) Baumdiagramm (ohne Striche gezeichnet)

Frage 1	1		2		3	
Frage 2	1	2	1	2	1	2
Frage 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3

Die Zahlen 1, 2 und 3 bezeichnen die erste, zweite, dritte Antwortmöglichkeit.

Es gilt: $\Omega = \{(111), (112), (113), (121), \dots, (323)\}$
mit $|\Omega| = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ gleich wahrscheinlichen Ergebnissen.

Somit folgt: $P(i) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{18} = \frac{1}{18}; P(ii) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{18} = \frac{1}{9}$

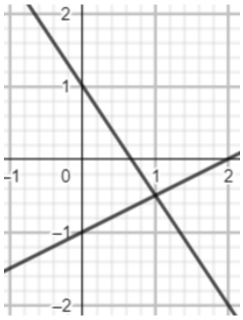
$P(iii) = 1 - P(keine\ richtig) = 1 - \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{18} = \frac{7}{9}$ $\quad (P(E) = 1 - P(\bar{E}))$

Die Berechnung über das Gegenereignis ist hier viel einfacher als folgendes Vorgehen:

P(iii) = P(eine richtig) + P(zwei richtig) + P(drei richtig)
= P(nur erste richtig)+P(nur 2te richtig)+P(nur 3te richtig) + P(1,2 ri)+P(2,3 ri)+P(1,3 ri) + P(alle richtig)

Aufgabe 6 – Gleichungssysteme

a) Auflösen der ersten Gleichung nach y ergibt: $2y = x - 2 \Rightarrow y = 0{,}5x - 1$.



(I) $x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow x = 2y + 2$ (I´)
(II) $y = -1{,}5x + 1$

Einsetzen von (I´) in (II) ergibt: $y = -1{,}5(2y + 2) + 1$
$y = -3y - 3 + 1$
$4y = -2$
$y = -0{,}5$

Einsetzen in (I´) ergibt: $x = 2(-0{,}5) + 2 = 1$
$\Rightarrow L = \{(1; -0{,}5)\}$

b) Keine Lösung – die zugehörigen Geraden sind parallel, aber nicht identisch, z. B.
(I) $2y - x = 4$
(II) $2y - x = 2$

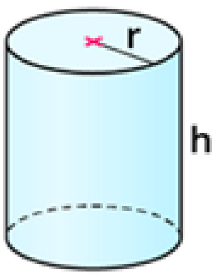
Unendlich viele Lösungen – die zugehörigen Geraden sind identisch, z. B.
(I) $x + y = 2$
(II) $2{,}5x + 2{,}5y = 5$

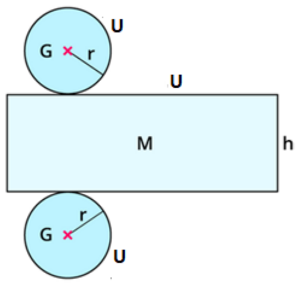
Aufgabe 7 – Kreis und Zylinder

a) Unter Anwendung der Formeln $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ und $A = r^2 \cdot \pi$ ergibt sich:

Umfang in cm	$2 \cdot 3 \cdot \pi = 6\pi$	$\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \pi + 2 \cdot 3 = 4{,}5\pi + 6$	$\frac{240}{360} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \pi + 2 \cdot 3 = 4\pi + 6$	$2 \cdot 3 \cdot \pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi = 10\pi$
Flächeninhalt in cm^2	$3^2\pi = 9\pi$	$\frac{3}{4} \cdot 3^2\pi = 6{,}75\pi$	$\frac{2}{3} \cdot 3^2\pi = 6\pi$	$3^2\pi - 2^2\pi = 5\pi$

b) G: Grundfläche U: Umfang M: Mantelfläche h: Zylinderhöhe r: Zylinderradius





Für den Oberflächeninhalt gilt:
$O = 2 \cdot G + M$
$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$

Für das Volumen gilt:
$V = G \cdot h = \pi r^2 h$